Pourquoi apprendre à faire les opérations à la main ?

Michel Delord - Lille, 29 septembre 2006

**Aujourd'hui la question n'est plus de savoir si le calcul va reculer,
mais quand il va disparaître.**
Rapport au Président de la République, 1976
Simon Nora et Alain Minc, :*L'informatisation de la société*

Laurent Lafforgue vient de donner des axes de réponse à la question : « Pourquoi l'école ? ». Il a fait remarquer que l'on ne pouvait parler d'instruction que si l'on donnait un contenu déterminé et organisé à cette instruction. Je me contenterais ici de préciser ce contenu sur *l'apprentissage des algorithmes écrits des opérations*, une partie certes très réduite du programme de l'école primaire mais enjeu central dans les débats actuels, aussi bien nationaux qu'internationaux.

Avant d'aborder directement cette question, il me semble nécessaire de faire quelques remarques préliminaires sur la fausse opposition entre connaissance du sens de l'opération et connaissance des algorithmes des opérations, opposition dont la solution n'est jamais, comme en général l'opposition entre les compétences de bases et la compréhension conceptuelle, la mise en avant exclusive d'un des aspects mais la compréhension du rapport entre les deux aspects de l'opposition[i].

Aujourd'hui je ne m'intéresserai pas aux avantages de l'utilisation des nombres concrets, dont l'enseignement a été supprimée par la réforme des maths modernes et qui était une des bases de l'introduction de l'analyse dimensionnelle : il est piquant que ceux qui mettent en avant *le sens* contre *la technique* soient ceux là même qui ont milité pour cette suppression, et pour la suppression, dans le cours d'arithmétique, de la leçon *sens de l'opération* qui lui correspondait et dans laquelle se trouvait la définition de chaque opération, qui était naturellement suivie par diverses leçons sur la *technique de l'opération*.

Il est aberrant d'opposer le sens de l'opération et sa technique de celle-ci car un cours bien conduit du type de ceux présents dans tous les manuels des années 20 - et tout à fait assimilable – déduit la technique du sens. Je ne prendrais pour cela qu'un exemple, celui de l'addition mais on peut l'étendre à toutes les opérations.

On disait régulièrement dans l'école de mon enfance, celle des années 50 : « *On n'ajoute pas des vaches et des cochons* » ou « *On n'ajoute pas des torchons et des serviettes* ». Il vaut peut être mieux dire, dés que la phrase est compréhensible pour les élèves « *On n'ajoute que des quantités de même nature et on n'effectue l'opération que si elles sont exprimées dans la même unité* ». Et au lieu de se poser des problèmes pour savoir si l'on peut ajouter deux oranges et trois vaches ou deux escargots et trois cochons[1] alors que l'on n'a pas enseigné les unités fondamentales de longueur, de poids et de contenance, il vaut beaucoup mieux, en prenant de préférence ses exemples dans le *Système International*,[ii] dire

i) on ne peut pas ajouter trois mètres et deux litres car ce ne sont pas des quantités de même nature
ii) on peut ajouter trois mètres et deux décimètres mais, pour trouver le résultat, on n'ajoute pas trois et deux car ce sont certes des quantités de même nature - des longueurs - mais elles ne sont pas exprimées dans la même unité
iii) pour ajouter trois mètres et deux décimètres, on remplace trois mètres par trente décimètres et l'on trouve que 3 m + 2 dm = 32 dm

Posons maintenant l'addition de 2213 et 473

		4	7	3
+	2	2	1	3
	2	6	8	6

Si l'on ajoute 4 et 2 d'une part et 7 et 1 d'autre part , c'est bien parce que 7 et 1 sont *de même nature*, des dizaines, ainsi que 4 et 2 qui sont des centaines.

Maintenant si l'on passe aux nombres décimaux et que l'on additionne 2,213 et 47,3 une fois l'explication précédente donnée[2] :

[1] Deux oranges et trois vaches : non si on les considère comme des fruits, oui si on les considère comme des solides déformables de poids inférieur à dix tonnes. Deux escargots et trois cochons : oui si on les considère comme des animaux, non si on les considère comme des mammifères ou des gastéropodes.

[2] Et un nombre suffisant d'exercices donnés pour automatiser cette bonne habitude, pour que l'élève n'ait plus à se remémorer à chaque fois l'explication rationnelle mais que le maître puisse y revenir lorsqu'il y a erreur en ne donnant pas simplement, pour l'addition des décimaux, l'argument strictement technique *Tu n'as pas aligné les virgules* mais qu'il puisse dire *Attention, tu additionnes des centièmes et des unités*.

	4	7	,	3		
+		2	,	2	1	3
	4	9	,	5	1	3

La même définition de l'addition permet de dire que l'on additionne 7 et 2 parce que ce sont des *unités* de la *classe des unités simples* et 3 et 2 parce que ce sont des dixièmes ce qui est la justification de la consigne pratique : *Aligner les virgules*.

C'est également cette même définition qui permettra de définir l'addition des fractions et c'est ce que faisait déjà le Dictionnaire Pédagogique en 1882, au changement de vocabulaire près : « *L'addition des fractions (ou des expressions fractionnaires) suppose qu'elles aient le même dénominateur , car on ne peut ajouter entre elles que des quantités de même espèce et de même dénomination* ».[iii]

I) Maîtrise générale du calcul à l'entrée en sixième[iv]

Mais commençons par l'état des élèves sortant actuellement du primaire : nous nous intéresserons plus spécifiquement à la division qui est un bon indicateur du niveau général du calcul puisque sa maîtrise suppose celle des trois autres opérations.

A) Evaluation sixième septembre 2005 : Numération, calcul mental, opérations

Numération :
Ecrire six cent vingt sept mille en chiffre : 25% d'échecs.

Calcul mental :
- Quel nombre faut-il ajouter à 25 pour trouver 100 ? 28% d'échecs.
- Combien vaut 60 divisé par 4 ? 60% d'échecs.
-Le constat est identique l'année précédente, où par exemple 35% des élèves furent incapables de trouver la moitié de 130.

Calcul écrit :
- 164,8 + 26,57 : 27% d'échecs.
- 127,85 - 13,2 : 30% d'échecs.
- 876 × 34 : 53% d'échecs.
- 27,5 × 23 : 70 % d'échecs.
- 81 divisé par 6 : 38 % d'échecs.
- 408 divisé par 12 : 46 % d'échecs

B) Evaluation Cinquième – Rentrée 2002

Un des arguments évoqués pour justifier cet état de fait est de prétendre : « les élèves l'apprendront au collège ». Mais à la première évaluation[3] faite en 5[eme] en 2002, on obtient

Pour la multiplication 9,74 × 3,5 : 62,7% d'échecs

Et pour la division

Exercice 28 a

3	9	7	8	13
	0	7		306
		7	8	
			0	

Echec : 59%

Exercice 28 b

1	7	8	,	8		8
	1	8				22,35
		2		8		
				4	0	
					0	

Echec : 74%

Ces résultats sont si catastrophiques que l'évaluation en cinquième n'a pas été reconduite.

[3] Et la seule car, au vu des résultats aussi bien en mathématiques qu'en français, l'expérience n'a pas été renouvelée et le mot d'ordre discret a été de cacher les résultats aux parents, comme l'a même recommandé officiellement l'académie de Créteil : « *Il est d'ailleurs bon de rappeler que la communication de ces scores aux élèves ou à leurs parents n'est pas systématiquement prévue* »

C) Un exemple de division faite par une excellente élève de sixième

Il s'agissait de dire combien d'heures, de minutes et de secondes représentent 223 200 secondes. L'élève commence donc par faire la division de 223 200 par 3600 (nombre de secondes correspondant à une heure) pour trouver le nombre d'heures, … ce qui donne les pages suivantes :

```
  1 3 2 6 0 0
+     3 6 0 0
+     3 6 0 0
  1 4 3 8 0 0
+     3 6 0 0
+     3 6 0 0
  1 5 2 0 0 0
+   1 4 4 0 0
  1 6 6 4 0 0
+     3 6 0 0
  1 7 0 0 0 0
+     3 6 0 0
+     3 6 0 0
  1 7 7 2 0 0
+     3 6 0 0
      3 6 0 0
  1 8 4 4 0 0
+     3 6 0 0
  1 8 8 0 0 0
+     3 6 0 0
  1 9 2 6 0 0
+     3 6 0 0
+     3 6 0 0
  2 0 8 8 0 0
+     3 6 0 0
  2 1 2 4 0 0
+     3 6 0 0
  2 1 6 0 0 0
      3 6 0 0
  2 1 9 6 0 0
      3 6 0 0
  2 2 3 2 0 0
```

```
  2 2 3 2 0 0 | 3600
- 1 7 8 0 0   | 2
  1 4 1 2 0
    3 6 0 0
```

II) Evolution des programmes

<table>
<tr><th colspan="6">Programmes de 1945 (en cours jusqu'en 1970)</th></tr>
<tr><th>GS</th><th>CP</th><th>CE1</th><th>CE2</th><th>CM1</th><th>CM2</th></tr>
<tr>
<td>Calcul. - Groupements d'objets : 20, 30, 40, jusqu'à 50…. - Demi; moitié; tiers; quart. Petits exercices de calcul mental : additions, soustractions, multiplications, divisions. - Représentation des nombres, de l'unité jusqu'à 50. Petits exercices écrits de calcul avec dessins correspondants. -</td>
<td>Les nombres de 1 à 100. Dizaines et demi-dizaines. Compter par 2, par 10, par 5. Usage du damier de cent cases et du mètre à ruban. Exercices et problèmes concrets d'addition, de comparaison et de soustraction (nombres d'un chiffre, puis de deux chiffres, de multiplication et de division par 2 et 5.</td>
<td colspan="2">Formation des nombres de 1 à 20. Table d'addition.
Numération de 1 à 100, puis de l à 1.000 ; compter par milliers en liaison avec l'étude des unités usuelles du système métrique : franc, mètre, centimètre, kilomètre, litre, centilitre, hectolitre, gramme, kilogramme (sans l'usage de la virgule).
Usage et pratique de l'addition et de la soustraction.
Addition et soustraction mentales d'un nombre d'un chiffre.
Table de multiplication. Usage et pratique de la multiplication et de la division (par un nombre de deux chiffres au plus) dans des problèmes simples empruntés à la vie courante. Calcul rapide de la multiplication et de la division par 2 et 5.</td>
<td colspan="2">Nombres décimaux en liaison avec les unités théoriques et pratiques de monnaies, de longueurs, de distances, de poids et de capacités. Changements d'unités (décimales) ; multiplication et division par 10, 100, 1.000.
Usage et pratique des quatre opérations sur les nombres décimaux.
Problèmes de la vie courante, traités oralement ou par écrit, avec, éventuellement, usage du calcul mental ou rapide.</td>
</tr>
<tr><th colspan="6">Programmes de 2002</th></tr>
<tr><th colspan="3">Cycle 2 : Cycle des fondamentaux</th><th colspan="3">Cycle 3 : Cycle des approfondissements</th></tr>
<tr>
<td colspan="3">Dès le cycle 2, les élèves sont confrontés à des calculs additifs, soustractifs ou multiplicatifs. Dans un premier temps, ceux-ci sont traités par des procédures de calcul réfléchi, élaborées par les élèves qui utilisent leurs connaissances en numération et en calcul mental et donc sans imposer de méthode particulière. Seule la technique opératoire de l'addition (posée en colonnes) est exigée à la fin du cycle 2.
3 - CALCUL
3.1 Calcul automatisé
- connaître ou reconstruire très rapidement les résultats des tables d'addition (de 1 à 9) et les utiliser pour calculer une somme, une différence, un complément, ou décomposer un nombre sous forme de somme;
- trouver rapidement le complément d'un nombre à la dizaine immédiatement supérieure ;
- connaître et utiliser les tables de multiplication par deux et cinq, savoir multiplier par dix ;
- calculer des sommes en ligne ou par addition posée en colonne.
3.2 Calcul réfléchi
- organiser et traiter des calculs additifs, soustractifs et multiplicatifs sur les nombres entiers,
- résoudre mentalement des problèmes à données numériques simples.
3.3 Calcul instrumenté
- utiliser à bon escient une calculatrice (en particulier pour obtenir un résultat lorsqu'on ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace).</td>
<td colspan="3">Les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur des nombres d'usage courant, en s'attachant à assurer une bonne compréhension des étapes du calcul. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une recherche de virtuosité excessive.
4 - CALCUL
4.1 Résultats mémorisés, procédures automatisées
- connaître les tables d'addition (de 1 à 9) et de multiplication (de 2 à 9)…
- multiplier ou diviser un nombre entier ou décimal par 10, 100, 1000 ;
- calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux, par un calcul écrit en ligne ou posé en colonnes ;
- calculer le produit de deux entiers ou le produit d'un décimal par un entier (3 chiffres par 2 chiffres), par un calcul posé;
- calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres), par un calcul posé.
…
4.3 Calcul instrumenté
…
- utiliser une calculatrice pour déterminer la somme, la différence de deux nombres entiers ou décimaux, le produit de deux nombres entiers ou celui d'un nombre décimal par un entier, le quotient entier ou décimal (exact ou approché) de deux entiers ou d'un décimal par un entier;</td>
</tr>
<tr><td colspan="6">Le texte en rouge correspond aux contenus à enseigner, le texte en bleu « aux conseils pédagogiques »</td></tr>
</table>

III) L'apprentissage simultané de la numération et du calcul

Avant les réforme des années 1880, on enseignait séparément dans le temps la numération, puis l'addition, la soustraction, la multiplication et la division : l'apprentissage simultané de la numération et du calcul, c'est-à-dire l'apprentissage simultané des 4 opérations au fur et à mesure des progrès dans l'apprentissage de la numération se généralise à partir de cette date et figurera au programme du CP de 1880 à 1970[v], époque à laquelle on revient à l'état antérieur au moment de la mise en place des maths modernes, mesure justifiée par une nécessité d'allégement des programmes. On réduit en CP l'apprentissage des opérations à celui de l'addition avec une interdiction explicite de l'utilisation des décompositions dans l'apprentissage de la numération : «*On ne peut plus étudier chaque naturel comme somme ou produit de naturels, étudier ses "décompositions", car ces notions ainsi que celles de différence ou quotient seront abordées par étapes.* »(APMEP 72[vi]).

Or le grand avantage de cet apprentissage simultané n'est pas quantitatif - l'élève en sait plus - mais qualitatif : l'élève comprend mieux, en les apprenant simultanément, la numération et les opérations qui sont indissolublement liées.

En effet,

- la *numération de position* est liée aux opérations : 340 signifie bien 3 *fois* 100 *plus* 4 *fois* 10

- la "connaissance intime du nombre "(*René Thom*) n'intervient que si un nombre est conçu comme résultat des différentes opérations car ce sont les opérations qui sont la liaison entre les nombres : on ne comprend vraiment ce qu'est 6 qu'une fois dépassée la compréhension de sa place dans le comptage (entre 5 et 7) pour, en utilisant ses diverses décompositions, savoir qu'il est le résultat de 4+2, 5+1, 7-1, 8-2, 2×3, 6×1, le quotient des nombres 12 à 17 par 2… bien sûr d'abord sous forme de manipulations, constellations, puis en calcul mental puis écrit.

Mais laissons parler le directeur de l'enseignement primaire de Jules Ferry , F. Buisson :

> "*Dégagée des considérations psychologiques qui l'ont inspirée, [la méthode du calcul intuitif] fait faire aux enfants, d'eux-mêmes et par intuition, les opérations essentielles du calcul élémentaire ; elle a pour but de leur faire connaître les nombres : connaître un objet, ce n'est pas seulement savoir son nom, c'est l'avoir vu sous toutes ses formes, dans tous ses états, dans ses diverses relations avec les autres objets ; c'est pouvoir le comparer avec d'autres, le suivre dans ses transformations, le saisir et le mesurer, le composer et le décomposer à volonté. Traitant donc les nombres comme un objet quelconque qu'il s'agirait de rendre familier à l'intelligence de l'enfant, Grube s'élève contre l'antique usage d'apprendre successivement aux élèves d'abord l'addition, puis la soustraction, puis les deux autres règles.*"[vii]

Un autre avantage de l'apprentissage des quatre opérations au moment de l'apprentissage de la numération tient à l'importance de la résolution des problèmes, objectif central supposé[4] des concepteurs des programmes actuels : dans la mesure où résoudre des problèmes revient en dernière analyse à rechercher quelles sont les opérations à utiliser pour parvenir au

[4] Les programmes actuels se caractérisent aussi par le refus de la définition des opérations en terme d'opérations sur les grandeurs et comme introduction aux bases de l'analyse dimensionnelle, savoirs qui sont cependant des bases incontournables … de la résolution des problèmes.

résultat[5], le report de la mise en place de la soustraction, de la multiplication et de la division produit cet étrange résultat : pendant ce temps, que l'on peut estimer à trois ans, l'entraînement hautement productif de l'élève à la résolution des problèmes se limite au choix entre l'addition… et l'addition. Il est donc inutile d'entreprendre de vastes recherches didactiques pour comprendre un phénomène régulièrement relevé par les enseignants : pourquoi les élèves confondent opération et addition ou choisissent très souvent comme opération pour résoudre un problème la dernière qu'ils ont étudiée ? Le recours explicatif à des "déficits d'images mentales", des "problèmes de conflits cognitifs" ne sert qu'à masquer le déficit intellectuel des programmes.

Enfin, une dernière raison milite pour l'apprentissage le plus tôt possible des opérations et de leurs algorithmes, surtout celui de la division qui est le plus compliqué :

- on apprend ainsi sa technique à une époque où l'élève aime imiter le maître.

- difficile, cette technique peut s'acquérir lentement de manière agréable (Une division tous les deux jours de la fin du CP au CM2, c'est-à-dire pendant 5 ans, rend l'apprentissage aussi indolore qu'efficace) alors que le retard dans son apprentissage soit le rend inefficace par manque de pratique répétée soit oblige à une accumulation soudaine d'exercices répétitifs pénibles pour l'élève.

IV) Pourquoi apprendre les *opérations à la main* ?

Disons tout d'abord que, même si le courant qui nie toute nécessité à l'apprentissage du calcul à la main est maintenant minoritaire au niveau mondial, il a été très longtemps dominant aussi bien à l'étranger qu'en France[6] :

En France, en 1984, la COPREM, organe officiel du MEN, nous dit :

> « *La maîtrise parfaite des " quatre opérations " effectuées sur papier n'est plus de nos jours une nécessité absolue en soi, puisque le cas échéant la machine peut jouer un rôle de " prothèse pour le calcul ". Il n'est donc pas très important d'atteindre une grande fiabilité dans l'exécution sur papier des opérations: en cas d'urgence, on pourrait se procurer pour une somme modique (quelques paquets de cigarettes) une calculette à la boutique du coin »*[7]

Aux Etats-Unis, un auteur, Steven Leinwand, cité dans la pétition de 1999[viii] contre les programmes recommandés par M.Riley, secrétaire d'Etat à l'éducation, dit aussi :

---

[5] … bien que de nombreux experts du ministère considèrent cette affirmation comme une monstruosité !

[6] On peut remarquer un parallélisme étroit entre l'évolution des positions sur la lecture et l'évolution de celles sur la nécessité de l'apprentissage des algorithmes. Au cours des années 75-80 et 90, la théorie idéo-visuelle présente le déchiffrage - voie indirecte - comme un obstacle à la maîtrise de la lecture ; la pratique des opérations par calcul posé est vue aussi non seulement comme inutile comme potentiellement dangereuse. Maintenant les théories dominantes n'avancent plus de telles positions extrêmes mais, alors que la bonne marche pour l'apprentissage de la lecture et des opérations posées a été perdue, ils défendent des positions, qualifiés par eux-même « d'éclectiques », qui interdisent un apprentissage correct de la lecture et des algorithmes des opérations.

[7] "*Contribution à l'enseignement mathématique contemporain : Analyse des contenus, méthodes, progressions, relatifs aux principaux thèmes des programmes : La proportionnalité / Le calcul numérique*" MEN CRDP Strasbourg Dépôt légal 1987. Responsables de la rédaction de ce texte : la direction des collèges, des lycées et l'inspection générale de mathématiques. Compléments : http://michel.delord.free.fr/txt1999/1_opinions.html

" Il est temps de reconnaître que pour beaucoup d'étudiants, véritable capacité mathématique, d'une part, et aisance avec les méthodes opératoires impliquant des calculs papier-crayon sur des nombres à plusieurs chiffres, d'autre part, sont mutuellement exclusives. En réalité, il est temps d'admettre que continuer à enseigner ces savoirs à nos élèves n'est pas nécessaire, mais que c'est même contre-productif et carrément dangereux." (http://www.edweek.org/ew/1994/20lein.h13)

La première raison de la nécessité de l'apprentissage de l'algorithme des opérations : l'élève ne peut comprendre ce qu'est une opération s'il n'est pas capable par lui-même de l'effectuer réellement en partant des deux nombres donnés de départ – c'est-à-dire écrits dans une base donnée, ici 10 - pour arriver par lui-même à en construire le résultat et ce dans un cadre suffisamment général pour qu'il sache lui-même qu'il peut le faire pour tous les nombres[8]. En ce sens, l'utilisation de la calculette pour faire des opérations que l'élève ne sait pas faire à la main, *comme c'est explicitement recommandé par exemple dans les programmes* par exemple pour le quotient d'un décimal par un entier, non seulement n'apprend rien mais induit chez lui une attitude magique par rapport à cet instrument qui devient ainsi une boite noire produisant par miracle le bon résultat[9].

V) Pourquoi apprendre la division *à la main* ?

A) La maîtrise de la division est le meilleur entraînement de la maîtrise des trois autres opérations et du calcul mental.

B) La division sans poser les soustractions, technique spécifiquement française, est un des meilleurs exercices de base du calcul mental et d'entretien de la connaissance des tables d'opérations.

C) La connaissance de propriétés de la division telles que « *Si l'on divise -ou multiplie- le dividende et le diviseur par un même nombre, le quotient ne change pas et le reste est divisé -ou multiplié- par ce nombre* » est une introduction indispensable

- à la compréhension de la notion de fraction et en particulier de leur simplification

- à la compréhension rationnelle de l'algorithme de la division de deux nombres décimaux puisque l'on va, par exemple, pour diviser 2,732 par 0,17, remplacer, en multipliant dividende et diviseur par 100, cette division par celle de 273,2 par 17, qui aura le même quotient mais dont le reste sera multiplié par 100.

Considérer le problème suivant : *On coupe une barre de bois de 2,732 m en morceaux de 0,17 m.*
Lire, sur la division posée, le nombre de morceaux et la taille du morceau restant.
ou
Effectuer le même calcul exclusivement à la calculatrice et expliquer comment on retrouve le quotient et le reste recherchés sur la division faite à la main.

[8] Pour la division des entiers, cela correspond à trois / quatre niveaux successifs :
- diviseur à 1 chiffre, dividende inférieur à 10 fois le diviseur. Calcul mental sans pose de l'opération.
- diviseur à 1 chiffre, dividende quelconque
- diviseur à deux chiffres
- diviseur à plus de deux chiffres

[9] La calculatrice n'est pas un instrument pour apprendre à calculer mais il faut des cours visant explicitement la maîtrise de son utilisation.

La division « nue » se présente sous la forme infra sur laquelle il faut lire

- le quotient *16 morceaux*
- la taille du morceau restant, *0,012 m* ou 12 mm car, en mètres

$$2{,}732 - 16 \times 0{,}17 = 2{,}732 - 2{,}72 = 0{,}012$$

2	,	7	3	,	2		0 , 1 7
1		0	3				1 6
			1				

La solution consiste à comprendre cette division sous la forme suivante (en faisant figurer ou non le nom des unités)

m		dm	cm		mm		m
2	,	7	3	,	2		0 , 1 7
1		0	3				1 6
0	**,**	**0**	1		**2**		

car, si l'opération est effectuée avec la nouvelle virgule(rouge)[10], le reste se lit
i) en revenant à l'ancienne virgule (noire)
ii) en n'omettant pas les décimales qui n'ont pas été abaissées dans le calcul

D) La connaissance de l'algorithme de la division est la seule manière de faire la différence entre nombres décimaux, rationnels et irrationnels (ce qu'interdit la calculette, aussi sophistiquée soit-elle) puisque la seule manière de savoir si une fraction représente un nombre rationnel est de vérifier que non seulement on obtient au quotient une répétition à l'identique d'une série de chiffres successifs, mais que la suite des restes se répète également ce qui se vérifie immédiatement sur une division posée.

E) La notion d'approximation d'un nombre rationnel par la suite des quotients décimaux est le premier contact, dès le CM, avec les notions mathématiques extrêmement profondes de limite et de limite d'une suite.

La suite 0,7 ; 0,71 ; 0,714 ; 0,7142 …. a pour limite 5/7 car ses éléments sont la suite des quotients décimaux dans la « division poussée » de 5 par 7.

F) Si l'on se place du point de vue de l'informatique théorique - c'est-à-dire pas du point de vue du B2i – l'algorithme de la division humaine est un premier exemple d'un algorithme *non trivial.*

G) L'apprentissage de l'algorithme de la division sur les nombres entiers – comme tout d'abord celui de l'addition et de la multiplication - est une excellente préparation à celui de l'apprentissage de ce même algorithme sur la division des polynômes
Car
- de la même manière que le quotient de 113 par 11 est 11 et le reste 2,
- le quotient de $1X^2 + 1X + 3$ par $1X + 1$ est $1X + 1$ et le reste 2.[ix]

---

[10] Pratiquement, on barre les virgules noires du diviseur et du dividende, mais on ne les efface pas car elles sont utiles pour la lecture du reste.

VI - Retour sur la division par soustraction/ addition

Pourquoi une bonne élève fait-elle la division de 223 200 par 3600 comme indiquée plus haut ?

Une première réponse se trouve dans les programmes de 2002 (et dans les précédents) lorsqu'ils affichent leurs positions soit sur le passage « des procédures personnelles aux procédures expertes » soit des affirmations du type :

> « *Les élèves sont confrontés à des calculs additifs, soustractifs ou multiplicatifs. Dans un premier temps, ceux-ci sont traités par des procédures de calcul réfléchi, élaborées par les élèves qui utilisent leurs connaissances en numération et en calcul mental et donc sans imposer de méthode particulière.* »

On confond ici, pour la division, deux choses

- l'*introduction* à partir de manipulations d'objets physiques, donc sur des petits nombres, de la notion de division comme soustraction répétée, situation d'introduction qui n'a pas à être prolongée dés que cette introduction est comprise : sa prolongation pousse l'élève à croire que la soustraction répétée est ***l***'algorithme de la division. Cette introduction n'est pas une nouveauté de la didactique née à partir des années 70[11], puisqu'elle est déjà pratiquée au XIXe siècle, même si elle était à tort peu présente explicitement dans les manuels des années 50. Voici ce qu'en dit la référence officielle de 1880 au moins jusqu'en 1923, le Dictionnaire pédagogique d'instruction primaire :

> " *La division n'est autre chose qu'une série de soustractions dans lesquelles le nombre à soustraire est toujours le même; on le fera aisément comprendre sur de petits nombres* [souligné par moi, MD]; *par exemple 6 peut être soustrait 4 fois du nombre 24; le quotient de 24 par 6 est donc 4.*"

Si j'ai 24 bonbons à partager entre 4 personnes, je peux tout à fait procéder par soustractions successives pour trouver la part de chacun. Et je peux le faire tout autant si je veux savoir combien de personnes pourront recevoir de sachets complets de 4 bonbons si j'ai au total au départ 24 bonbons. J'aurai dans les deux cas, et ceci est tout à fait compréhensible dès le CP, 3 soustractions à 24 bonbons de 4 bonbons chacune :

- dans le premier cas, les 4 bonbons représentent ce qui est distribué sur un tour
- dans le deuxième cas, un sachet de 4 bonbons représente la part de chacun

- la nécessité d'apprendre l'algorithme classique de la division - dit maintenant *procédure experte* - dès que l'on a dépassé cette introduction car il a effectivement été conçu justement pour les nombres « non petits . Il devient, par rapport à la division effectuée par soustraction, d'autant plus rapide et non générateur de fautes que le quotient est grand.

Une des raisons supplémentaires de l'utilisation spontanée de cette forme de division pour les cas où elle n'est pas adaptée vient aussi[12]

[11] Ce qui est une nouveauté est de baptiser l'introduction de la notion de division par soustraction répétée *procédure personnelle* et de la faire effectuer systématiquement non comme introduction sur la base de manipulations physiques mais calcul effectif indépendant de manipulations sur de grands nombres.

[12] Outre le fait que l'élève qui ne connaît bien que cet algorithme primitif et qui «ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace » car il trouve l'autre algorithme …difficile a été habitué , dés le cycle 2, à « utiliser à bon escient une calculatrice (en particulier pour obtenir un résultat lorsqu'on ne dispose pas d'une méthode de calcul efficace). » (Point 3.3 des programmes du cycle 2 : Calcul instrumenté)

i) du mépris pour la maîtrise d'un calcul exact : en 2002, c'est-à-dire l'année même où l'on enregistrait les résultats particulièrement bas donnés au début de ce texte, les programmes prescrivaient non pas d'insister sur la maîtrise des opérations mais … d'éviter la virtuosité: « *Les techniques opératoires usuelles … ne doivent pas faire l'objet d'une recherche de virtuosité excessive.* »

ii) du fait que l'algorithme classique, qui est certes le plus complexe des algorithmes des quatre opérations est cependant enseignable mais à la condition que tous les automatismes qui le composent aient été expliqués en prenant le temps nécessaire pour chacun d'eux : en fait, cet enseignement n'est possible que si les élèves connaissent non seulement parfaitement leurs tables mais aussi toutes les procédures de base du calcul mental pour les quatre opérations car chaque étape de la division est la répétition, en calcul mental

- d'une division : en … combien de fois … ?
- d'une multiplication et d'une soustraction simultanée.

Si ces conditions ne sont pas réunies, et elles ne peuvent être réunies que si l'élève a suivi une progression lui donnant le temps de les assimiler toutes, il est impossible d'enseigner correctement l'algorithme de la division.

iii) du fait que l'on a placé l'élève le plus souvent dans une situation qui ne lui permet pas de voir l'avantage de l'algorithme classique, ce qui correspond à ce qui est annoncé dans les programmes sous la forme *«Les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur des nombres d'usage courant. »*, l'algorithme classique n'étant pas enseigné en tant que tel - puisque les prérequis des élèves manquent - mais souvent accompagné de procédures qui l'alourdissent

- pose des soustractions écrites
- au lieu de trouver de tête le nouveau chiffre du dividende, l'élève écrira tous les multiples du diviseur calculés avant de commencer la division

Prenons un cas extrême pour nous faire comprendre : la division de 15201 par 4393

1) D'abord avec calcul des multiples du diviseur et pose des soustractions

L'élève calcule d'abord

$4393 \times 1 = 4393$	$4393 \times 2 = 8786$	$4393 \times 3 = 13179$	$4393 \times 4 = 17572$
$4393 \times 5 = 21965$	$4393 \times 6 = 26358$	$4393 \times 7 = 30751$	$4393 \times 8 = 35144$
$4393 \times 9 = 39537$			

Il reconnaît donc que 15201 contient 3 fois 4393 et écrit

1	5	2	0	1	4393
1	3	1	7	9	3
	2	0	2	2	

2) Ensuite calcul par addition (ou soustraction)

	1	5	2	0	1
-		4	3	9	3
	1	0	8	0	8

	1	0	8	0	8
-		4	3	9	3
		6	4	1	5

	6	4	1	5
-	4	3	9	3
	2	0	2	2

Il est bien évident dans ce cas que la procédure par soustraction est plus légère que la procédure classique[13].

Michel Delord

Bibliographie complémentaire

2003 -Précisons nos divergences (Réponse à Roland Charnay et à la commission Joutard)
Ce que pensait Jules Ferry de l'utilisation des calculettes http://michel.delord.free.fr/ferry_calc1.pdf
Sur les algorithmes http://michel.delord.free.fr/ferry_calc2.pdf
A propos du calcul mental http://michel.delord.free.fr/ferry_calc3.pdf

2003 - Michèle Artigue et l'âge du capitaine http://michel.delord.free.fr/captain1-0.pdf

2004 - A propos des nombres concrets et abstraits : Un témoignage historique sur l'école primaire française, Colloque *Numeracy and Beyond*, Pacific Institute for Mathematical Studies, Banff, Canada, 4 décembre 2004. http://michel.delord.free.fr/grip-banff.pdf

2006 - Débat avec Rémi Brissiaud sur les quatre opérations en CP
Forum de la SMF : http://smf.emath.fr/Forum/TribuneLibre/
Message 731 (Michel Delord) : Un Débat sur le calcul
Message 732 (Rémi Brissiaud) : Comment réfléchir ensemble sur les programmes de mathématiques à l'école?
Message 734 (Michel Delord): Re: Comment réfléchir ensemble sur les programmes de mathématiques à l'école?

[13] En ce cas précis l'élève n'a pas en primaire à savoir diviser à la main 15 201 par 4393 puisque le programme en « calcul posé » se limite à *Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne d'un nombre entier (d'au plus 4 chiffres) par un nombre entier (d'au plus 2 chiffres)*. Mais il peut le faire
- à la calculette puisque le programme prévoit pour le « calcul instrumenté », le quotient entier ou décimal (exact ou approché) de deux entiers sans limitation de la taille du diviseur et du dividende.
- ou par des « procédures personnelles »… et il le fait

Notes de fin

---

[i] Lire : *Hu Wu*, Basic Skills versus conceptual understanding A Bogus Dichotomy in Mathematics Education http://www.aft.org/pubs-reports/american_educator/fall99/wu.pdf

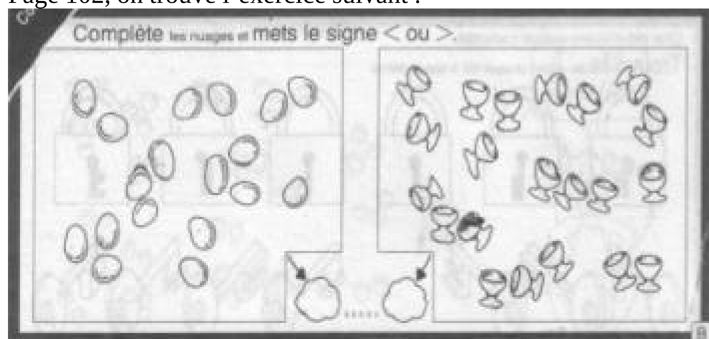
[ii] Le *Système international d'unités* (S.I.)est *un système* c'est-à-dire que ses différentes unités (Sept unités de base : *m, kg, s, A, K, mol, cd* et des unités dérivées : m² , m/s … *) entretiennent de riches rapports codifiés : on peut, à la différence des vaches et des cochons, non seulement les additionner et les soustraire mais également les multiplier et les diviser et l'on sait très précisément si l'on peut le faire ou ne pas le faire et comment le faire. Mais il est normal que les concepteurs des programmes qui ont, depuis 1970,

- supprimé la référence aux unités dans l'apprentissage de la numération,
- réduit l'apprentissage des opérations en CP à l'addition et la soustraction,

se concentrent sur ce qu'ils ont laissé dans les programmes , c'est-à-dire les seules addition et soustraction … des chevaux et des ânes.

Prenons, pour voir les dangers d'une position peu claire sur l'enseignement des débuts de l'analyse dimensionnelle, des exemples non pas dans les pires manuels actuels de CP mais dans ce qui est probablement le meilleur, le *Brissiaud, Ouzoulias, Clerc* (Edition Retz).

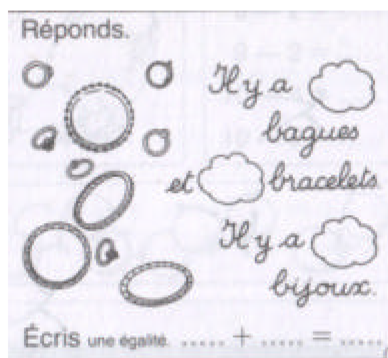
Page 102, on trouve l'exercice suivant :



Deux collections d'objets : 19 œufs et 21 coquetiers. La consigne est donc "Complète avec le signe > ou <"

Alors : *19 œufs est-il "plus grand" que 21 coquetiers ou 21 coquetiers est-il "plus grand" que 21 œufs?*

Page 57, on trouve l'exercice *infra* (mais on a le même type d'exercices avec des poireaux et des carottes, des tulipes jaunes et rouges) alors que n'est jamais dit explicitement dans le manuel que l'on ne doit ajouter que des quantités de même nature et que l'on fait au contraire explicitement ajouter des quantités qui peuvent être comprises comme n'étant pas de même nature. Il s'agit en fait d'opérations qui supposent et habituent à la manipulation de certains types de changements d'unités aux contours pour le moins flous (6 bagues = 6 bijoux = 6 solides de moins de 2 tonnes ?) avant que les élèves ne maîtrisent les changements d'unités les plus simples du SI du type 2 m = 20 dm qui, eux, sont soumis à des règles très strictes et dans lesquels on ne peut pas en général, écrire 6 u = 6 v si u et v ne sont pas la même unité.



Quelle est la bonne réponse ?

6 + 4 = 10

6 bagues + 4 bracelets = 10 bijoux

6 bagues + 4 bracelets = 2 (types de) bijoux

6 bagues + 4 bracelets = 10 solides de moins de 2 tonnes

* Pour plus de précisions, voir le site du Bureau international des poids et mesures http://www.bipm.fr/fr/si/

[iii] *Henri Sonnet,* Article *Fractions* de la Partie II du *Dictionnaire Pédagogique*, pages 792 à 798.

[iv] Consulter aussi :
Michel Delord, *1920 - 1995 - 2002 : de l'enseignement à la remédiation*, février 2003
http://michel.delord.free.fr/remed.html

Michel Delord, *Evaluation cinquième : le niveau monte. Risques de divisions sur l'évaluation de l'évaluation?*, octobre 2002 http://michel.delord.free.fr/eval5.pdf

[v] Le BO des « maths modernes » pour le primaire est à http://michel.delord.free.fr/bo70.pdf

[vi] Marguerite Robert, *Réflexions sur le programme rénové : Un nouvel état d'esprit*, Pages 15 à 58. Extrait de *La mathématique à l'école élémentaire*, Paris, Supplément au bulletin APMEP n° 282, 1972, 502 pages (Noté [APMEP72]) qui présente une sorte de bilan officiel de la réforme des mathématiques modernes par l'organisation qui en a été le principal vecteur.

[vii] Ferdinand Buisson in *Calcul intuitif*, *Dictionnaire de pédagogie d'instruction primaire*, Hachette, 1887. Tome 1 de la première partie, pages 316 à 317. http://michel.delord.free.fr/fb-calcintuit.pdf

[viii] http://michel.delord.free.fr/rileyfr.html

[ix] Lire Michel Delord : *Opérations arithmétiques et algèbre des polynômes ou Apprend-on seulement les opérations pour* trouver le résultat *?* http://michel.delord.free.fr/ar-alg.pdf